

**FOR EVALUATOR'S USE ONLY**

Sub. Code : **20**

*RASCM) 2012*

Optional Paper

**Mathematics : Paper - I**

Time : 3 Hours / Maximum Marks : 200 / Total Pages : 32

Evaluation Table												(For Evaluator's Use Only)	
PART-A				PART-B				PART-C				Grand Total	
QN	E-1	E-2	AC	QN	E-1	E-2	AC	QN	E-1	E-2	AC	PART-A	
1				21				33				PART-B	
2				22				34				PART-C	
3				23				35				Total	
4				24				36				(-) Marks	
5				25				37				Final Total	
6				26				38				Marks in Words	
7				27				39				Remarks of Evaluator/Chief Evaluator	
8				28									
9				29									
10				30									
11				31									
12				32									
13													
14													
15													
16													
17													
18												Remarks of Scrutiniser	
19													
20													
Total													
Evalu ator's Sign													

**BLANK PAGE**



**Note :** Attempt all the twenty questions. Each question carries 2 marks. Answer should not exceed 15 words.

**नोट :** समस्त २० प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिये २ अंक निर्धारित हैं। उत्तर १५ शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये।

1 If  $t$  is a linear transformation from a vector space  $V(F)$  to a vector space  $V'(F)$ , then show that  $t(v) = -t(v) \forall v \in V$ .

यदि  $t$  सदिश समष्टि  $V(F)$  से सदिश समष्टि  $V'(F)$ , पर एक रैखिक रूपान्तरण है, तो प्रदर्शित कीजिये कि  $t(v) = -t(v) \forall v \in V$ .

---



---



---



---



---



---



---

2 Show that  $\{1, i\}$  is a basis for the field  $C$  of complex numbers, considered as vector space over the field  $R$  of real numbers, where  $i^2 = -1$ .

प्रदर्शित कीजिये कि संमिश्र संख्या के क्षेत्र  $C$ , जो वास्तविक संख्या के क्षेत्र  $R$  पर एक सदिश समष्टि है, के लिए  $\{1, i\}$  एक आधार है, जहाँ  $i^2 = -1$  है।

---



---



---



---



---



---



---



3 Let  $t: R^2 \rightarrow R^2$  be a linear transformation defined by :

यदि  $t: R^2 \rightarrow R^2$  एक रैखिक रूपान्तरण है जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$t(x, y) = (x + y, x - y) \quad \forall (x, y) \in R^2.$$

Then find the matrix of  $t$  with respect to basis  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  of  $R^2$ .

तो  $R^2$  के आधार  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  के सापेक्ष  $t$  की मैट्रिक्स ज्ञात कीजिये।

4 Show that every subgroup of an abelian group is normal subgroup.

प्रदर्शित कीजिये कि एक आबेली समूह का प्रत्येक उप-समूह एक विशिष्ट उप-समूह होता है।

5 Write the conditions for a ring to be an integral domain.

एक वलय के पूर्णाकीय प्रान्त होने की शर्तें लिखिए।



- 6 Define field and give an example of a finite field.  
क्षेत्र की परिभाषा दीजिये और परिमित क्षेत्र का एक उदाहरण दीजिये।

- 7 Find the value of  $\left[(-1/2)\right]$ .

$\left[(-1/2)\right]$  का मान ज्ञात कीजिये।

- 8 Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$  का मान ज्ञात कीजिये।



- 9 Find the radius of curvature at the point  $(s, \psi)$  on the curve  $s = a \log(\sec \psi + \tan \psi)$ .  
वक्र  $s = a \log(\sec \psi + \tan \psi)$  के बिन्दु  $(s, \psi)$  पर वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

10 Evaluate  $\int_{-2}^1 |x| dx$ .

$\int_{-2}^1 |x| dx$  का मान ज्ञात कीजिये।

- 11 Prove that the series  
सिद्ध कीजिए की श्रेणी

$$1 + \frac{2^p}{2} + \frac{3^p}{3} + \frac{4^p}{4} + \dots$$

is convergent for all values of  $p$ .  
 $p$  के सभी मानों के लिए अभिसारी है।



12. Prove that the set  $Q$  of rational numbers is not an open set.

सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय  $Q$  एक विवृत्त समुच्चय नहीं है।

---

---

---

---

---

---

---

---

13. Let  $f$  be a real valued bounded function defined on closed interval  $[a, b]$ . Then for any partition  $P$  of  $[a, b]$ , prove that

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

यदि  $f$  संवृत्त अन्तराल  $[a, b]$  पर वास्तविक मान परिवर्द्ध फलन है, तो  $[a, b]$  के किसी विभाजन  $P$  के लिये सिद्ध कीजिये कि

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

---

---

---

---

---

---

---

---

14. Define uniform convergence of sequence of functions.

फलनों के अनुक्रम के लिए एक समान अभिसरण की परिभाषा दीजिये।

---

---

---

---

---

---

---

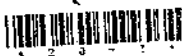
---



- 15 Write the equation of right circular cylinder whose axis is  $x$ -axis and radius is  $r$ .  
एक लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण लिखिए जिसका अक्ष  $x$ -अक्ष है तथा त्रिज्या  $r$  है।

- 16 If  $x-1=0$  is the directrix of the parabola  $y^2 - kx + 8 = 0$ , then find the values of  $k$ .  
यदि  $x-1=0$  परवलय  $y^2 - kx + 8 = 0$  की नियता है, तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिये।

- 17 Prove that the lines  
 $x = ay + b, z = cy + d$  and  $x = a'y + b', z = c'y + d'$  are perpendicular if  $aa' + cc' = -1$ .  
सिद्ध कीजिये कि रेखाएँ  $x = ay + b, z = cy + d$  और  $x = a'y + b', z = c'y + d'$  लम्बवत् हैं यदि  $aa' + cc' = -1$ .





- 18 Show that the function  $f(z) = x^2y - iy$  is not analytic any where.  
प्रदर्शित कीजिए कि फलन  $f(z) = x^2y - iy$  कहीं भी विश्लेषिक नहीं है।

- 19 Find the radius of convergence of the power series.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{(1+in^2)} z^n$$

घात श्रेणी  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{(1+in^2)} z^n$  की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- 20 Find the nature of singularity of function

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} \text{ at } z = \pi$$

फलन  $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$  की  $z = \pi$  पर विचित्रता की प्रकृति ज्ञात कीजिए।



**Note :** Attempt all the twelve questions. Each question carries 5 marks. Answer should not exceed 50 words.

**नोट :** समस्त १२ प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के ५ अंक निर्धारित हैं। उत्तर ५० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

21 If  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  be a basis of a vector space  $V(F)$ , then prove that each element of  $V$  can be expressed uniquely as a linear combination of elements of  $B$ , where  $F$  is a field.

यदि  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  किसी सदिश समष्टि  $V(F)$  का आधार है, तो सिद्ध कीजिये कि  $V$  का प्रत्येक अवयव समुच्चय  $B$  के अवयवों के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ  $F$  एक क्षेत्र है।

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



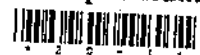
22 Prove that :

सिद्ध करो कि :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

is the

is the



23 Let  $(Z, +)$  be the additive group of integers and  $H = 3Z = \{3x | x \in Z\}$  be its subgroup, then find quotient group  $Z/H$ .

माना  $(Z, +)$ , पूर्णाकों का द्विचर संक्रिया योग के लिए समूह है और  $H = 3Z = \{3x | x \in Z\}$  इसका एक उपसमूह है, तो खण्ड समूह  $Z/H$  ज्ञात कीजिये।

24 Prove that a field has no proper ideal.

सिद्ध कीजिए कि एक-क्षेत्र की कोई भी उचित गुणजावली नहीं होती है।



25 Change the order of integration in the following integral :

निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिये :

$$\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f(x,y) dx dy$$

26 Evaluate  $\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\pi i)} dz$ , where  $C$  is a circle  $|z-1|=4$

$\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\pi i)} dz$  का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ  $C$ ,  $|z-1|=4$  एक वृत्त है।



- 27 Prove that every finite subset of the set  $R$  of real numbers is compact.  
सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय  $R$  का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संहत होता है।

28 If  $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$ , then find the value of  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ .

यदि  $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$  हो, तो  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$  का मान ज्ञात कीजिए।



29 From a point  $P$  tangents are drawn to the parabola  $y^2 = 4ax$ . If the chord of contact of these tangents touches the rectangular hyperbola  $x^2 - y^2 = a^2$ , then prove that the locus of  $P$  is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

किसी बिन्दु  $P$  से परवलय  $y^2 = 4ax$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची गयी हैं। यदि इन स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा समकोणीय अतिपरबलय  $x^2 - y^2 = a^2$  को स्पर्श करती है, तो सिद्ध कीजिये कि बिन्दु  $P$  का बिन्दुपथ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1 \text{ है।}$$



30 Find the equation of sphere which passes through the point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and the circle

$$x^2 + y^2 = a^2; z = 0.$$

बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  और वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2; z = 0$  से होकर गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये।

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



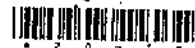


31 Find the envelope of the family of straight lines  $x/a + y/b = 1$ , where  $ab = 4$ .

सरल रेखाओं के कुल,  $x/a + y/b = 1$  जहाँ  $ab = 4$  है, का अन्वलोप ज्ञात कीजिये।

32 Find the Taylor's series expansion of  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$  in the powers of  $(z-2)$ .

$(z-2)$  की घातों में फलन  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$  का टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिये।



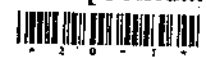
**Note :** Attempt any five questions. Each question carries 20 marks. Answer should not exceed 200 words.

**नोट :** कोई भी ५ प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिए २० अंक निर्धारित हैं। उत्तर २०० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

**33** Determine the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix  $A$ , where :  
मैट्रिक्स  $A$  के लिए अभिलाक्षणिक मूल तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$





- 34 Define prime ideal and prove that an ideal  $I$  of a commutative ring  $R$  with unity is prime if and only if  $R/I$  is an integral domain.  
अभाज्य गुणजावली की परिभाषा दीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय  $R$  की एक गुणजावली  $I$  अभाज्य गुणजावली है यदि और केवल यदि  $R/I$  एक पूर्णाकीय प्रान्त है।



20 - I ]

[Contd..







- 36 (a) Show that the eight points of intersection of the curve  $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - a^2 = 0$  and its asymptotes lie on a circle  $x^2 + y^2 = a^2$ .

प्रदर्शित कीजिए कि वक्र  $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - a^2 = 0$  तथा इसकी अनन्तस्पर्शी के आठ प्रतिच्छेद बिन्दु एक वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  पर स्थित होंगे।

- (b) Prove that every real valued function which is differentiable at a point  $a \in R$  is continuous at that point. Give an example to show that the converse of this result is not true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वास्तविक मानीय फलन जो कि बिन्दु  $a \in R$  पर अवकलनीय है वह उस बिन्दु पर सतत भी होगा। एक उदाहरण दीजिए कि इस परिणाम का विलोम सत्य नहीं है।

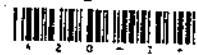




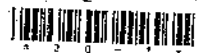


- 37 (a) If a function  $f$  is continuous in closed interval  $[a, b]$  and  $c \in (a, b)$  such that  $f(c) < 0$ , then prove that there exists a  $\delta > 0$  such that  $f(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ .  
यदि फलन  $f$  संवृत्त अन्तराल  $[a, b]$  में सतत है तथा  $c \in (a, b)$  एक ऐसा बिन्दु है कि  $f(c) < 0$  तो सिद्ध कीजिए कि एक  $\delta > 0$  का अस्तित्व होगा कि  $f(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ .
- (b) If  $f(x) = (x - 4) \log x$ , then prove that the equation  $x \log x = 4 - x$  is satisfied at least one value of  $x \in (1, 4)$ .  
यदि  $f(x) = (x - 4) \log x$ , तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण  $x \log x = 4 - x$  कम से कम एक मान  $x \in (1, 4)$  के लिए संतुष्ट होती है।





- 38 Prove that the equation  $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$  represents a cone which touches coordinate planes. Find the equation to the reciprocal cone.
- सिद्ध कीजिये कि  $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$  एक शंकु को प्रदर्शित करता है जो निर्देशांक समतलों स्पर्श करता है। इसके व्युत्क्रम शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये।



39 By the method of contour integration prove that :  
परिरेखा समाकलन विधि से सिद्ध कीजिये कि .:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}, (m \geq 0).$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



A large table with approximately 25 empty rows and a single column. The table is defined by a vertical line on the left and horizontal lines for each row.

